Санкт-Петербургский Государственный Университет

Фундаментальная математика и механика
Математическая физика

Гальковский Егор Денисович

Формула следа для дифференциального оператора на отрезке при возмущении младшего коэффициента конечным зарядом

Дипломная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Назаров А. И.

Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор Шейпак И. А.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Fundamental Mathematics and Mechanis

Egor Galkovskii

Trace formula for differential operator on a segment under the lowest coefficient perturbation by finite signed measure

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
professor Alexander Nazarov

Reviewer:
professor Igor Sheipak

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

Введение

Рассмотрим оператор $\mathbb{L}$ на отрезке $[a,b]$, порождаемый дифференциальным выражением порядка $n \geqslant 2$

$$\ell = (-i)^n D^n + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) D^k$$

(здесь $p_k \in L_1(a,b)$ – комплекснозначные функции) и граничными условиями

$$(P_j(D)y)(a) + (Q_j(D)y)(b) = 0, \qquad j = 0, \ldots, n-1, \tag{1}$$

(P_j и Q_j – полиномы степени меньше n с комплексными коэффициентами). Обозначим через d_j наибольшую из степеней P_j и Q_j, a_j и b_j – коэффициенты при степени d_j у полиномов P_j и Q_j соответственно (таким образом, a_j и b_j не могут одновременно обращаться в нуль).

Будем считать систему граничных условий (1) нормированной (это означает, что $\sum\limits_{j=0}^{n-1} d_j$ является минимальной среди всех систем граничных условий, которые могут быть получены из (1) невырожденными линейными преобразованиями; см. [4, гл. II, §4], а также [10] в случае более общей постановки).

Предположим, далее, что система (1) регулярна по Биркгофу (см. [4, гл. II, §4]). Тогда оператор $\mathbb{L}$ имеет дискретный спектр[1], который мы будем обозначать $\{\lambda_N\}_{N=1}^{\infty}$. В дальнейшем мы всегда будем нумеровать собственные числа в порядке возрастания модулей с учетом кратности (т.е. $|\lambda_N| \leqslant |\lambda_{N+1}|$).

Обозначим через $\mathbb{Q}$ оператор умножения на конечный (комплексный) заряд $\mathfrak{q}$ (пространство таких зарядов будем обозначать $\mathfrak{M}[a,b]$). Тогда оператор $\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} = \mathbb{L} + \mathbb{Q}$ также имеет дискретный спектр, который мы будем обозначать $\{\lambda_N(\mathfrak{q})\}_{N=1}^{\infty}$.

[1]Заметим, что мы не предполагаем самосопряженности $\mathbb{L}$.

Нас будет интересовать регуляризованный след

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) := \sum_{N=1}^{\infty} \left[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N - \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \mathfrak{q}(dx) \right].$$

Не умаляя общности, в дальнейшем будем считать, что $\int\limits_a^b \mathfrak{q}(dx) = 0$.

Впервые формула регуляризованного следа была получена в 1953 году И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном для задачи

$$-y'' + \mathfrak{q}(x)y = \lambda y; \qquad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2}$$

Именно, в работе [2] было показано, что при вещественной $\mathfrak{q}(x) \in \mathcal{C}^1[0,\pi]$ справедливо соотношение

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = -\frac{\mathfrak{q}(0) + \mathfrak{q}(\pi)}{4}.$$

Статья [2] породила многочисленные усиления и обобщения. Обзор результатов в задаче о вычислении регуляризированного следа можно найти в статье В. А. Садовничего и В. Е. Подольского [9].

В недавней работе А. И. Назарова, Д. М. Столярова и П. Б. Затицкого [6] для произвольного $n \geqslant 2$ и регулярных граничных условий была получена формула

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \frac{\psi_a(a+)}{2n} \cdot \mathbf{tr}\,(\mathbb{A}) + \frac{\psi_b(b-)}{2n} \cdot \mathbf{tr}\,(\mathbb{B}), \tag{3}$$

в предположениях, являющихся сейчас стандартными[2]: $\mathfrak{q} \in L_1(a,b)$, и функции

$$\psi_a(x) = \frac{1}{x-a} \int\limits_a^x \mathfrak{q}(t)dt, \qquad \psi_b(x) = \frac{1}{b-x} \int\limits_x^b \mathfrak{q}(t)dt \tag{4}$$

имеют ограниченную вариацию в точках a и b соответственно. В формуле (3) $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – матрицы, элементы которых выражаются через ко-

[2]Для оператора $\mathbb{L}$ без младших членов и гладкой функции $\mathfrak{q}$ формула (3) была установлена ранее Р. Ф. Шевченко [11].

эффициенты a_j и b_j, $j = 0, \ldots, n-1$. Более того, в [6] было показано, что в важном частном случае **почти разделенных** граничных условий множители $\mathbf{tr}\,(\mathbb{A})$ и $\mathbf{tr}\,(\mathbb{B})$ в (3) упрощаются и выражаются через суммы степеней полиномов P_j и Q_j.

Принципиально новый эффект был обнаружен уже в нашем веке А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [7, 8]. Именно, оказалось, что если в задаче (2) $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[0,\pi]$ – заряд, локально непрерывный в точках 0 и π, то

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = -\frac{\mathfrak{q}(0)+\mathfrak{q}(\pi)}{4} - \frac{1}{8}\sum_j h_j^2, \tag{5}$$

где h_j – скачки функции распределения заряда $\mathfrak{q}$ (ряд $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ в этом случае суммируется методом средних).

Таким образом, при $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ регуляризованный след перестает быть линейным функционалом от $\mathfrak{q}$. Для δ-потенциала этот эффект был получен при некоторых других граничных условиях в работе [3].

В 2016 году было получен результат [1], продолживший работу А. М. Савчука и А. А. Шкаликова, а именно, был доказан аналог формулы (5) для произвольных регулярных граничных условий.

В настоящей работе мы приводим результат, обобщающий формулу (3) на случай оператора $\mathbb{L}$ порядка $n \geq 3$ с произвольными регулярными граничными условиями и $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$.

Статья организована следующим образом. В §1 сформулированы основной результат и несколько промежуточных утверждений. Эти утверждения доказываются в §§2 – 3. Главный результат работы доказан в §4. В §5 приводится пример, подтверждающий принципиальную новизну исследуемого эффекта.

Введем некоторые обозначения. Полную вариацию заряда $\mathfrak{q}$ обозначим $\|\mathfrak{q}\|$. Определим также функцию распределения

$$\mathcal{Q}(x) = \int\limits_{[a,x]} \mathfrak{q}(dt).$$

Оператор, порожденный дифференциальным выражением $\ell_0 = (-i)^n D^n$

и регулярными условиями (1), обозначим $\mathbb{L}_0$, а его собственные числа – $\{\lambda_N^0\}_{N=1}^{\infty}$.

Далее, $G_0(x,y,\lambda)$ – функция Грина оператора $\mathbb{L}_0 - \lambda$ (см. [4, гл. I, §3]). Заметим, что резольвента $\frac{1}{\mathbb{L}_0-\lambda}$ – интегральный оператор с ядром $G_0(x,y,\lambda)$, и определим его след

$$\mathbf{Sp}\,\frac{1}{\mathbb{L}_0-\lambda} = \int\limits_a^b G_0(x,x,\lambda)\,dx.$$

Для произвольной функции $\Phi(\lambda)$, определенной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, введем функцию $\tilde{\Phi}(z)$ следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi(\lambda),\ \text{где}\ z = \lambda^{\frac{1}{n}},\ Arg(z) \in [0, \frac{2\pi}{n}).$$

Напомним определение суммирования ряда методом средних (методом Чезаро порядка 1). Пусть I_ℓ – последовательность частных сумм ряда $\sum\limits_j a_j$. Ряд называется суммируемым методом средних, если существует предел

$$(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{\ell\to\infty} I_\ell := (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} I_\ell.$$

Все положительные константы, значения которых нам не важны, обозначаются буквой C.

Спасибо А.И. Назарову за советы и поддержку.

1. Формулировка результатов

Наш основной результат заключается в двух следующих теоремах.

Теорема 1.1. *Пусть $n \geq 3$ – нечетное. Предположим, функция $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ такова, что $\mathcal{Q}'(a) = \mathcal{Q}'(b) = 0$. Тогда для любых регулярных граничных условий (1) справедлива следующая формула:*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \frac{\mathcal{Q}'(a)}{2n}\boldsymbol{tr}(\mathbb{A}) + \frac{\mathcal{Q}'(b)}{2n}\boldsymbol{tr}(\mathbb{B}). \qquad (6)$$

Ряд в левой части (6) суммируется обычным способом. В обоих случаях матрицы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ такие же, как в (3) (см. [6, Theorem 2]).

Принципиально новый эффект возникает в случае, когда n четно. А именно, появляется зависимость от скачка функции $\mathcal{Q}$ в точке $\frac{a+b}{2}$, величину которого мы обозначим через $\Delta_{\mathcal{Q}}(\frac{a+b}{2})$. Также приходится рассмаотривать более сильные условия на регулярность заряда $\mathfrak{q}$ на краях отрезка.

Теорема 1.2. *Пусть $n \geq 4$ – четно. Предположим,функция $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ совпадает с некоторой функцией $\tilde{\mathfrak{q}}$ из $\mathbb{L}_1[a,b]$, причем функции $\psi_a(x)$ и $\psi_b(x)$, построенные по $\tilde{\mathfrak{q}}$ имеют ограниченные вариации в точках a и b соответственно (см. (4)). Тогда для любых регулярных граничных условий (1) справедлива следующая формула:*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \frac{\psi_a(a+)}{2n}\boldsymbol{tr}(\mathbb{A}) + \frac{\psi_b(b-)}{2n}\boldsymbol{tr}(\mathbb{B}) + \mathfrak{C}\Delta_{\mathcal{Q}}(\frac{a+b}{2}). \qquad (7)$$

*Если числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$ асимптотически отделимы, то ряд в левой части (7) суммируется **методом средних**.*

*Если же числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$ попарно совпадают или асимптотически близки, то сначала члены ряда, отвечающие близким или совпадающим значениям, складываются попарно, а затем полученный ряд суммируется **методом средних**.*

В обоих случаях матрицы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ такие же, как в (3) (см. [6, Theorem 2]).

Коэффициент $\mathcal{C}$ вычисляется по формуле

$$(\mathcal{C},1)\text{ - }\lim_{R\to\infty}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|=R^n} G_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda\right)d\lambda$$

и, в частности, определяется старшими коэффициентами многочленов P_j, Q_j граничных условий (1).

Нам понадобится следующая теорема (см. [1, Theorem 2.3]), которая позволяет выразить регуляризованный след через функцию Грина оператора $\mathbb{L}_0$.

***Теорема* 1.3.** *Пусть $n \geqslant 3$. Для любой последовательности $R = R_\ell \to \infty$, отделенной от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$, справедливо следующее соотношение:*

$$\sum_{\lambda_N(\mathfrak{q}),\lambda_N<R}\Big[\lambda_N(\mathfrak{q})-\lambda_N\Big] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=R^n}\int\limits_a^b G_0(x,x,\lambda)\,\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda + o(1).$$

Следующие две промежуточные теоремы мы докажем и будем использовать при доказательстве Теоремы 1.1 и Теоремы 1.2.

***Теорема* 1.4.** *Пусть в случае нечетного n выполнено $\mathcal{Q}'(a) = \mathcal{Q}'(b) = 0$, а в случае четного n носитель заряда $\mathfrak{q}$ отделен от концов отрезка $[a,b]$. При четных n предположим дополнительно $\Delta_Q(\frac{a+b}{2}) = 0$. Тогда для любой последовательности $R = R_\ell \to \infty$, отделенной от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$, верна оценка*

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|\lambda|=R^n}\int\limits_a^b G_0(x,x,\lambda)\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda = o(1).$$

***Теорема* 1.5.** *Пусть n четно, а суммирование проводится по последовательности R_l так же, как в Теореме 1.2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – корни квадратного уравнения Биркгофа. Если числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$ асимптотически* *сходятся, то*

$$(\mathcal{C},1)\text{ - }\lim_{R\to\infty}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|=R^n} G_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda\right)\,d\lambda = C_1\frac{Log(\xi_2/\xi_1)}{\xi_1-\xi_2},$$

если ξ_1 *и* ξ_2 *различны и*

$$(\mathcal{C},1)\text{ - }\lim_{R\to\infty}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|=R^n} G_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda\right)\,d\lambda = -\frac{C_1}{\xi_1} = -\frac{C_1}{\xi_2},$$

когда ξ_1 *и* ξ_2 *совпадают. В случае асимптотически разделенных чисел* $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$

$$(\mathcal{C},1)\text{ - }\lim_{R\to\infty}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|=R^n} G_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\lambda\right)\,d\lambda = C_1\frac{Log(-\xi_2/\xi_1)}{\xi_1-\xi_2}.$$

Константа C_1 *зависит от старших коэффициентов многочленов из граничных условий (1).*

Замечание 1. *Если граничные условия разделенные, тогда, как известно (см. например [5]),* $\xi_1 = -\xi_2$ *и поэтому* $\mathfrak{C} = 0$.

2. Доказательство Теоремы 1.4

На протяжении всего параграфа мы будем полагать

$$\mathcal{Q}'(a) = \mathcal{Q}'(b) = 0$$

для нечетных n. В случае четных n будем считать, что носитель функции $\mathfrak{q}$ отделен от концов отрезка $[a, b]$.

$$\psi_a(a+) = 0,\ \psi_b(b-) = 0,$$

в случае четного n. Нам понадобится равенство (12) из [6] при подстановке $y = x$:

$$\tilde{G}_0(x, x, z) = -\frac{i}{nz^{n-1}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \rho^{\alpha-1} e^{izx(\rho^{\beta-1}-\rho^{\alpha-1})} \cdot \frac{\Delta_{\alpha,\beta}(z)}{\Delta(z)},$$

а также равенства (16)-(19) из [6], которые мы сформулируем в виде леммы:

***Лемма* 2.1.** *Пусть* $R = |z|$, $w = e^{iArg(z)}$.

1. *Пусть* $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \leq \nu$. *Тогда*

$$\frac{\Delta_{\alpha,\beta}(Rw)}{\Delta(Rw)} = e^{iRw(b\rho^{\alpha-1}-a\rho^{\beta-1})} \left(\frac{\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}}{\hat{\Delta}} + \theta_1(Rw) \right).$$

2. *Пусть* $\alpha \neq \beta, \alpha \leq \nu < \beta$. *Тогда*

$$\frac{\Delta_{\alpha,\beta}(Rw)}{\Delta(Rw)} = e^{iRw(b\rho^{\alpha-1}-b\rho^{\beta-1})} \left(\frac{\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}}{\hat{\Delta}} + \theta_2(Rw) \right).$$

3. *Пусть* $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta > \nu$. *Тогда*

$$\frac{\Delta_{\alpha,\beta}(Rw)}{\Delta(Rw)} = e^{iRw(a\rho^{\alpha-1}-b\rho^{\beta-1})} \left(-\frac{\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}}{\hat{\Delta}} + \theta_3(Rw) \right).$$

4. Пусть $\alpha \neq \beta, \alpha > \nu \geq \beta$. Тогда

$$\frac{\Delta_{\alpha,\beta}(Rw)}{\Delta(Rw)} = e^{iRw(a\rho^{\alpha-1}-a\rho^{\beta-1})}\left(-\frac{\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}}{\hat{\Delta}} + \theta_4(Rw)\right).$$

Здесь $\hat{\Delta}(z)$ – определитель, явный вид которого приведен в формулах (14) и (15). Числа $\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}$ выражаются через элементы некоторых матриц, зависящих от граничных условий, и значения этих чисел не важны за исключеним четырех случаев, в которых мы их выпишем явно, см. (10), (11), (12) и (13).

Функции $\theta_k(z)$ ограничены равномерно по R и стремятся к нулю при фиксированном $Arg(w) \in (0, \frac{2\pi}{n})$, когда $R \to \infty$. Число $\nu = \nu(w)$ выбирается так, чтобы при $m \leq \nu(w)$ выполнялось $Re(iw\rho^{m-1}) < 0$, а при $\nu(w) < m \leq n$ выполнялось $Re(iw\rho^{m-1}) > 0$.

Разобьем следующий интеграл на слагаемые:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=R^n}\int\limits_a^b \mathfrak{q}(x)G_0(x,x,\lambda)dxd\lambda \;=$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\int\limits_a^b \mathfrak{q}(x)\tilde{G}_0(x,x,z)nz^{n-1}dxdz \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} I_{\alpha,\beta}(R), \qquad (8)$$

Мы докажем три леммы. В первой оценена часть слагаемых из суммы в правой части (8). Вторая лемма показывает, что из n^2 слагаемых в сумме (8) не более, чем четыре имеют ненулевой предел в обычном смысле при $R \to \infty$, что следует из первой леммы. Третья лемма показывает, что оставшиеся четыре слагаемые после перехода к пределу по R методом средних также станут равны нулю.

Для упрощения формул введем обозначение $k := \frac{n}{2}$ в случае четного n.

Лемма 2.2. *Пусть пара (α, β), $\alpha \neq \beta$ произвольна при нечетном n и не совпадает ни с одной из четырех пар $(1, k+1)$, $(k+1, 1)$, (k, n) и*

(n,k) в случае четного n. Тогда

$$\left| e^{iRwx(\rho^{\beta-1}-\rho^{\alpha-1})} \frac{\Delta_{\alpha,\beta}(Rw)}{\Delta(Rw)} \right| \le C_1 e^{-c_0 R \min(x-a,b-x)},$$

где C_1, $c_0 > 0$.

Доказательство. Введем комплекснозначную функцию

$$\Psi_{\alpha,\beta}(w,x) = iw\rho^{\alpha-1}\eta^1_\alpha(x) + iw\rho^{\beta-1}\eta^2_\beta(x)$$

для $(w,x) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times [a,b]$,

где

$$\eta^1_\alpha(x) = \begin{cases} b-x, & \alpha \le \nu, \\ a-x, & \alpha > \nu. \end{cases} \qquad \eta^2_\beta(x) = \begin{cases} x-a, & \beta \le \nu, \\ x-b, & \beta > \nu. \end{cases}$$

Отсюда сразу видно, что вещественная часть функции $\Psi_{\alpha,\beta}(w,x)$ отрицательна (равно как и оба ее слагаемые) для всех $(w,x) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (a,b)$. Заметим, что в случае нечетных n равенство нулю вещественной части числа $iw\rho^{m-1}$ при $w \in \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ влечет один из трех вариантов:

- $m = 1$, $Arg(w) = 0$,
- $m = \frac{n-1}{2}$, $Arg(w) = \frac{\pi}{n}$,
- $m = n$, $Arg(w) = \frac{2\pi}{n}$.

В каждом из вариантов при $\alpha \ne \beta$ имеем $|Re(iw\rho^{\alpha-1})| + |Re(iw\rho^{\beta-1})| > 0$ равномерно по $w \in \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} Re(\Psi_{\alpha,\beta}(w,x)) = Re(iw\rho^{\alpha-1})\eta^1_\alpha(x) + Re(iw\rho^{\beta-1})\eta^2_\beta(x) = \\ -|Re(iw\rho^{\alpha-1})| \cdot |\eta^1_\alpha(x)| - |Re(iw\rho^{\beta-1})| \cdot |\eta^2_\beta(x)| \le \\ -\min(x-a,b-x)(|Re(iw\rho^{\alpha-1})| + |Re(iw\rho^{\beta-1})|) \le \\ -c_0 \min(x-a,b-x) \end{aligned} \tag{9}$$

равномерно по z для некоторой положительной константы c_0.

В случае четных n количество вариантов, при которых $Re(iw\rho^{m-1})$ может обратиться в ноль, становится равно четырем:

- $m = 1$, $Arg(w) = 0$,
- $m = k$, $Arg(w) = \frac{2\pi}{n}$,
- $m = k + 1$, $Arg(w) = 0$,
- $m = n$, $Arg(w) = \frac{2\pi}{n}$.

Во всех остальных вариантах $Re(iw\rho^{m-1}) < 0$ и отделено от нуля равномерно по $w \in \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$. Аналогичное утверждение верно и про $Re(iw\rho^{\beta-1})$. Тем самым, неравенство (9) верно и для четных n для произвольных пар (α, β), за исключением четырех случаев: $(1, k+1)$, $(k+1, 1)$, (k, n) и (n, k). Доказательство леммы завершает следующее соотношение:

$$e^{iRwx(\rho^{\beta-1}-\rho^{\alpha-1})}\frac{\Delta_{\alpha,\beta}(Rw)}{\Delta(Rw)} = e^{R\Psi_{\alpha,\beta}(w,x)}\left(C + o(1)\right).$$

$\square$

Лемма 2.3. *Предположим, либо n нечетно, либо n четно, но пара (α, β) не совпадает ни с одной из пар $(1, k+1)$, $(k+1, 1)$, (k, n), (n, k). Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} I_{\alpha,\beta}(R) = 0$.*

Доказательство. Разобьем внутренний интеграл в $I_{\alpha,\beta}(R)$ на два: по отрезкам $x \in [a, \frac{b+a}{2}]$ и $x \in [\frac{b+a}{2}, b]$. Рассмотрим последовательность $\tau_R = \min(\frac{b-a}{2}, R^{-\frac{1}{2}})$. Существует последовательность ε_R, $\varepsilon_R \to 0$ таких, что $|Q(x)| \le \varepsilon_R(x-a)$ для любых x из отрезка $[a, a+\tau_R]$. Проинтегрируем по частям по переменной x и после этого оценим интеграл:

$$\left|\int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\int\limits_a^{\frac{b+a}{2}}\mathfrak{q}(x)\rho^{\alpha-1}e^{izx(\rho^{\beta-1}-\rho^{\alpha-1})}\frac{\Delta_{\alpha,\beta}(z)}{\Delta(z)}dxdz\right|=$$

$$=\left|C\int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\int\limits_a^{\frac{b+a}{2}}zQ(x)e^{izx(\rho^{\beta-1}-\rho^{\alpha-1})}\frac{\Delta_{\alpha,\beta}(z)}{\Delta(z)}dxdz\right|\leq$$

$$\leq C\varepsilon_R\left|\int\limits_a^{a+\tau_R}R^2(x-a)e^{-c_1R(x-a)}dx\right|+CVar(\mathfrak{q})e^{-c_1R\tau_R}=\ o(1).$$

Проведя аналогичные действия для точки b получаем, что предел $I_{\alpha,\beta}$ равен нулю. □

Тем самым, случай нечетных n тривиален, и в этом случае теорема доказана. При четном n сумма

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}I_{\alpha,\beta}(R)$$

состоит из не более чем четырех ненулевых слагаемых с точностью до $o(1)$. Выпишем эти слагаемые:

$$I_{1,k+1}(R)=\int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\int\limits_a^b\mathfrak{q}(x)e^{2iz(b-x)}\left(\frac{\hat{\Delta}_{1,k+1}}{\hat{\Delta}}+\theta(z)\right)dxdz$$

$$I_{k+1,1}(R)=\int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\int\limits_a^b\mathfrak{q}(x)\rho^ke^{2iz(x-a)}\left(-\frac{\hat{\Delta}_{k+1,1}}{\hat{\Delta}}+\theta(z)\right)dxdz$$

$$I_{k,n}(R)=\int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\int\limits_a^b\mathfrak{q}(x)\rho^{k-1}e^{2iz(b-x)\rho^{k-1}}\left(\frac{\hat{\Delta}_{k,n}}{\hat{\Delta}}+\theta(z)\right)dxdz$$

$$I_{n,k}(R) = \int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} \int\limits_a^b \mathfrak{q}(x)\rho^{n-1}e^{2iz(x-a)\rho^{k-1}} \left(-\frac{\hat{\Delta}_{n,k}}{\hat{\Delta}} + \theta(z)\right) dxdz$$

Лемма 2.4. *Пусть n четно. Тогда существует последовательность $R = R_l \to \infty$, разделяющая числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$, такая, что*[3]

$$(\mathcal{C}, 1)\text{ - }\lim_{R\to\infty} I_{\alpha,\beta}(R) = 0,$$

при $(\alpha, \beta) \in \{(1, k+1),\ (k+1, 1),\ (k, n),\ (n, k)\}$.

Доказательство. Рассмотрим для примера первый интеграл. Показатель экспоненты под интегралом имеет неположительную вещественную часть. В частности, когда x отделен от точки b, а аргумент z от нуля, эта экспонента стремится к нулю при $R \to \infty$. Интеграл по $R\Gamma_2$ стремится к нулю, что следует из Леммы 2.2. В силу теоремы Коши о вычетах заменим интеграл по дуге $R\Gamma_1$ на интеграл по двум отрезкам $(R, 0) \to (R, R\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})) \to (R\cos(\frac{\pi}{n}), R\sin(\frac{\pi}{n}))$. Здесь мы пользуемся тем, что R отделено от чисел $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$ и, тем самым, весь контур также отделен от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$ при больших R. Интеграл по второму отрезку стремится к нулю в силу Леммы 2.2. Из этого следует, что

$$I_{1,k+1} = i \int\limits_0^{R\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})} \int\limits_a^b \mathfrak{q}(x)e^{2i(R+i\tau)(b-x)} \left(\frac{\hat{\Delta}_{1,k+1}}{\hat{\Delta}} + \theta(R+i\tau)\right) dxd\tau + o(1)$$

Теперь вернемся к функциям $\theta(z)$. Они получились из отношения определителей $\frac{\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}(z)}{\hat{\Delta}(z)}$. Для краткости введем обозначение $[a] = a + O(\frac{1}{R})$. Определитель в числителе теперь можно представить в следующем виде:

[3] *Для доказательства Теоремы 1.4 нам достаточно доказать существование хотя бы одной последовательности такого вида. В действительности, можно показать, что нам подойдет любая такая последовательность.*

$$\hat{\Delta}(z) = \begin{pmatrix} \rho^{0\cdot d_0}([a_0]+[b_0]e^{iz(b-a)}) & \dots & [\rho^{(k-1)d_0}a_0] & \rho^{kd_0}[a_0e^{iz(b-a)}+b_0] & \dots & [(\rho^{n-1})^{d_0}b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}([a_{n-1}]+[b_{n-1}]e^{iz(b-a)}) & \dots & [\rho^{(k-1)d_{n-1}}a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[a_{n-1}e^{iz(b-a)}+b_{n-1}] & \vdots & [\rho^{(n-1)d_{n-1}}b_{n-1}] \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что $\hat{\Delta}(z) = [\Delta_0^1] + [C]e^{iz(b-a)}$, где число Δ_0^1 указано явно в (15). Определитель $\hat{\Delta}_{1,k+1}$ можно представить в аналогичном виде. Отсюда следует, что $\theta(R+i\tau) = \theta(R+\frac{2\pi}{b-a}+i\tau)+O(R^{-1})$. Следовательно, фиксировав последовательность $R = R_l = R_0 + \frac{2\pi l}{b-a}$, получим:

$$I_{1,k+1} = i \int\limits_0^{R\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{n})} \int\limits_a^b \mathfrak{q}(x)e^{2i(R+i\tau)(b-x)} \left(\frac{\hat{\Delta}_{1,k+1}}{\hat{\Delta}} + \theta(R_0+i\tau) + O(R^{-1}) \right) dxd\tau + o(1).$$

При переходе к пределу по Чезаро часть интеграла с $O(R^{-1})$ исчезнет. Обозначим $\frac{\hat{\Delta}_{1,k+1}}{\hat{\Delta}} + \theta(R_0+i\tau)$ через $\zeta(\tau)$.

Тем самым, нам нужно найти

$$J = (\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{R\to\infty} i \int\limits_0^{R\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{n})} \int\limits_a^b \mathfrak{q}(x)e^{2iR(b-x)-2\tau(b-x)}\zeta(\tau)dxd\tau,$$

где предел берется по последовательности $R = R_N = R_0 + \frac{2\pi}{b-a}N$.

Заменим верхний предел внешнего интеграла на ∞, поскольку интеграл по интервалу $[R\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{n}), \infty)$ оценивается аналогично интегралу в Лемме 2.3. Все интегралы сходятся в силу того, что носитель $\mathfrak{q}$ отделен от концов отрезка $[a,b]$. Тем самым,

$$J = (\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{R\to\infty} i \int\limits_0^{\infty} \int\limits_a^b \mathfrak{q}(x)e^{2iR(b-x)-2\tau(b-x)}\zeta(\tau)dxd\tau.$$

Пусть $R_l = R_0 + \frac{2\pi l}{b-a}$. Тогда

$$(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{R\to\infty} e^{2iR(b-x)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} e^{2iR_l(b-x)} = \lim_{N\to\infty} \frac{e^{2iR_0}}{N} \frac{1-e^{4\pi i N\frac{b-x}{b-a}}}{1-e^{4\pi i\frac{b-x}{b-a}}}.$$

Ясно, что выражение под знаком предела ограничено по модулю единицей. Также, оно стремится к нулю при всех x, не равных a, $\frac{a+b}{2}$, b, то есть почти всюду относительно меры $\mathfrak{q}$. По Теореме Лебега предел равен нулю. Лемма доказана, равно как и Теорема 1.4. $\square$

3. Доказательство Теоремы 1.5

Для упрощения записи введем обозначение $\chi = \sum\limits_{j=0}^{n} d_j$. Вынесем экспоненциальные сомножители из определителя $\Delta(z)$ (см. [4], § 4). Полученную функцию обозначим через $\hat{\Delta}(z)$. Аналогичную операцию проведем и с определителями $\Delta_{\alpha,\beta}$, получив числа $\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}$.

Пусть $w \in \Gamma_1$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда определитель в знаменателе функции Грина такой:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0 + b_0 e^{iz}] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[a_0 e^{iz} + b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1} + b_{n-1} e^{iz}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[a_{n-1} e^{iz} + b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz \sum\limits_{j=0}^{k-1} \rho^j}$$

Определители в числителе следующие:

$$\Delta_{1,k+1}(z) = \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{0\cdot d_0}[b_0] & \rho^{(k+1)d_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{0\cdot d_{n-1}}[b_{n-1}] & \rho^{(k+1)d_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz \sum\limits_{j=0}^{k-1} \rho^j} e^{2iz}$$

$$\Delta_{k+1,1}(z) = \begin{vmatrix} \rho^{k\cdot d_0}[b_0] & \rho^{1\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[a_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{k\cdot d_{n-1}}[b_{n-1}] & \rho^{1\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz \sum\limits_{j=0}^{k-1} \rho^j}$$

Пусть $w \in \Gamma_2$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда определитель в знаменателе такой:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0 + b_0 e^{iz\rho^{k-1}}] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[a_0 e^{iz\rho^{k-1}} + b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1} + b_{n-1} e^{iz\rho^{k-1}}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \vdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[a_{n-1} e^{iz\rho^{k-1}} + b_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz\sum\limits_{j=0}^{k-1}\rho^j}$$

Определители в числителе следующие:

$$\Delta_{k,n}(z) = \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{k\cdot d_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-2)d_0}[b_0] & \rho^{(k-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{k\cdot d_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-2)d_{n-1}}[b_{n-1}] & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz\sum\limits_{j=0}^{k-1}\rho^j} e^{2iz\rho^{k-1}}$$

$$\Delta_{n,k}(z) = \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-2)\cdot d_0}[a_0] & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[a_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-2)\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz\sum\limits_{j=0}^{n-1}\rho^j}$$

Поменяем столбцы в определителях $\Delta_{k+1,1}$ и $\Delta_{n,k}$:

$$\Delta_{k+1,1}(z) = -\begin{vmatrix} \rho^{k\cdot d_0}[a_0] & \rho^{1\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{k\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{1\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \vdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz\sum\limits_{j=0}^{k-1}\rho^j}$$

$$\Delta_{n,k}(z) = -\begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-2)\cdot d_0}[a_0] & \rho^{(n-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-2)\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} (iz)^{\chi} e^{-iz\sum\limits_{j=0}^{n-1}\rho^j}$$

Отбросив экспоненты, получим определители с крышками. Поменяем порядки столбцов в определителях так, чтобы степени ρ при a_j и b_j шли по возрастанию.

$$\hat{\Delta}_{1,k+1} = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{(k+1)d_0}[b_0] & \dots & \rho^{n\cdot d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{(k+1)d_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{n\cdot d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$\hat{\Delta}_{k+1,1} = (-1)^{k}\begin{vmatrix} \rho^{1\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{k\cdot d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{1\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{k\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$\hat{\Delta}_{k,n} = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{(k-1)\cdot d_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-2)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{(k-1)\cdot d_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-2)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$\hat{\Delta}_{n,k} = (-1)^{k}\begin{vmatrix} \rho^{(-1)\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-2)\cdot d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{(-1)\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-2)\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что

$$\hat{\Delta}_{1,k+1} = -\hat{\Delta}_{n,k} \cdot \rho^{\chi},$$
$$\hat{\Delta}_{k+1,1} = -\hat{\Delta}_{k,n} \cdot \rho^{\chi},$$

Поэтому

$$\tilde{G}_0(x,x,z) = -\frac{i}{nz^{n-1}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \rho^{\alpha-1} e^{izx(\rho^{\beta-1}-\rho^{\alpha-1})} \cdot \frac{\Delta_{\alpha,\beta}(z)}{\Delta(z)} =$$
$$= -\frac{i}{nz^{n-1}} \frac{e^{2iz(1-x)}\hat{\Delta}_{1,k+1} - e^{2izx}\hat{\Delta}_{k+1,1} - \rho^{-1}e^{2iz(1-x)\rho^{k-1}}\hat{\Delta}_{k,n} + \rho^{-1}e^{2izx\rho^{k-1}}\hat{\Delta}_{n,k}}{\hat{\Delta}(z)} + O(\frac{1}{R}) =$$
$$= -\frac{i}{nz^{n-1}} \frac{e^{2iz(1-x)}\hat{\Delta}_{1,k+1} - e^{2izx}\hat{\Delta}_{k+1,1} + \rho^{-1-\chi}e^{2iz(1-x)\rho^{k-1}}\hat{\Delta}_{k+1,1} - \rho^{-1-\chi}e^{2izx\rho^{k-1}}\hat{\Delta}_{1,k+1}}{\hat{\Delta}(z)} + O(\frac{1}{R})$$

Вернемся теперь к $\hat{\Delta}(z)$. Если $w \in \Gamma_1$:

$$\hat{\Delta}(z) = \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0 + b_0 e^{iz}] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[a_0 e^{iz} + b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1} + b_{n-1} e^{iz}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[a_{n-1} e^{iz} + b_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} = \tag{14}$$

$$= \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[b_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[a_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[a_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} e^{2iz} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[a_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[a_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} e^{iz} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[b_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[b_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} e^{iz} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} =$$

$$=: \Delta_2^1 e^{2iz} + \Delta_1^1 e^{iz} + \Delta_0^1 + O(\frac{1}{R}) = -\rho^{\chi}\Delta_0^1 e^{2iz} + \Delta_1^1 e^{iz} + \Delta_0^1 + O(\frac{1}{R}),$$

Если $w \in \Gamma_2$:

$$\hat{\Delta}(z) = \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0 + b_0 e^{iz\rho^{k-1}}] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[a_0 e^{iz\rho^{k-1}} + b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1} + b_{n-1} e^{iz\rho^{k-1}}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \vdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[a_{n-1} e^{iz\rho^{k-1}} + b_{n-1}] \end{vmatrix} = \tag{15}$$

$$= \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[b_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[a_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}} b_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] \end{vmatrix} e^{2iz\rho^{k-1}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[a_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] \end{vmatrix} e^{iz\rho^{k-1}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[b_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} e^{iz\rho^{k-1}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \rho^{0\cdot d_0}[a_0] & \dots & \rho^{(k-1)d_0}[a_0] & \rho^{kd_0}[b_0] & \dots & \rho^{(n-1)d_0}[b_0] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{0\cdot d_{n-1}}[a_{n-1}] & \dots & \rho^{(k-1)d_{n-1}}[a_{n-1}] & \rho^{kd_{n-1}}[b_{n-1}] & \cdots & \rho^{(n-1)d_{n-1}}[b_{n-1}] \end{vmatrix} =$$

$$=: \Delta_2^2 e^{2iz\rho^{k-1}} + \Delta_1^2 e^{iz\rho^{k-1}} + \Delta_0^2 + O(\frac{1}{R}) = -\rho^{-\chi}\Delta_0^2 e^{2iz\rho^{k-1}} + \Delta_1^2 e^{iz\rho^{k-1}} + \Delta_0^2 + O(\frac{1}{R}),$$

Заметим, что $\Delta_0^2 = \Delta_0^1$, $\Delta_1^1 = -\rho^\chi \Delta_1^2$. Сделав замену, получим:

$$\Gamma_1 \;:\; \hat{\Delta}(z) = -\rho^\chi \Delta_0^1 e^{2iz} + \Delta_1^1 e^{iz} + \Delta_0^1 + O(\frac{1}{R}),$$

$$\Gamma_2 \;:\; \hat{\Delta}(z) = -\rho^{-\chi} \Delta_0^2 e^{2iz\rho^{k-1}} + \Delta_1^2 e^{iz\rho^{k-1}} + \Delta_0^2 + O(\frac{1}{R}) = -\rho^{-\chi} \Delta_0^1 e^{2iz\rho^{k-1}} - \rho^{-\chi} \Delta_1^1 e^{iz\rho^{k-1}} + \Delta_0^1 + O(\frac{1}{R}).$$

Подставим $x = \frac{1}{2}$ в $\tilde{G}_0(x, x, z)$, получим:

$$\tilde{G}_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z\right) = -\frac{i}{nz^{n-1}} \frac{e^{iz}\hat{\Delta}_{1,k+1} - e^{iz}\hat{\Delta}_{k+1,1} + \rho^{-1-\chi} e^{iz\rho^{k-1}} \hat{\Delta}_{k+1,1} - \rho^{-1-\chi} e^{iz\rho^{k-1}} \hat{\Delta}_{1,k+1}}{\hat{\Delta}(z)} + O(\frac{1}{R}) =$$

$$= -\frac{i}{nz^{n-1}} \frac{(e^{iz} - \rho^{-1-\chi} e^{iz\rho^{k-1}})(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\hat{\Delta}(z)} + O(\frac{1}{R})$$

В итоге

$$\Gamma_1 \;:\; \tilde{G}_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z\right) = -\frac{i}{nz^{n-1}} \frac{e^{iz}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\Delta_0^1 + \Delta_1^1 e^{iz} - \rho^\chi \Delta_0^1 e^{2iz}} + O(\frac{1}{R}),$$

$$\Gamma_2 \;:\; \tilde{G}_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z\right) = -\frac{i}{nz^{n-1}} \frac{\rho^{-1} e^{iz\rho^{k-1}}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\Delta_0^1 e^{2iz\rho^{k-1}} + \Delta_1^1 e^{iz\rho^{k-1}} - \rho^\chi \Delta_0^1} + O(\frac{1}{R}).$$

После замены контура интегрирования так же, как и при доказательстве Леммы 2.4 получаем, что реальный вклад от функции Грина в подынтегральное выражение следующий:

$$\Gamma_1 : \tilde{G}_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, R_0 + i\tau\right) = -\frac{i}{n(R_0+i\tau)^{n-1}}\frac{e^{iR_0-\tau}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\Delta_0^1 + \Delta_1^1 e^{iR_0-\tau} - \rho^\chi \Delta_0^1 e^{2iR_0-2\tau}} + o(1), \tau \in [0, R\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2n})\,)$$

$$\Gamma_2 : \tilde{G}_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \rho(R_0 + i\tau)\right) = -\frac{i}{n(\rho(R_0+i\tau))^{n-1}}\frac{\rho^{-1}e^{-iR_0+\tau}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\Delta_0^1 e^{-2iR_0+2\tau} + \Delta_1^1 e^{-iR_0+\tau} - \rho^\chi \Delta_0^1} + o(1), \tau \in (-\infty, R\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2n})].$$

Экспонента под интегралом стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, при предельном переходе можно заменить $R\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2n})$ на ∞. Отсюда видно, что

$$\mathfrak{C} = -\frac{1}{2\pi i}(\mathcal{C}, 1)\text{-}\lim_{R\to\infty} \int\limits_{R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)} \int\limits_a^b \delta_{\frac{1}{2}}(x)\tilde{G}_0(x,x,z) n z^{n-1} dx dz =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}(\mathcal{C}, 1)\text{-}\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iR_0-\tau}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\Delta_0^1 + \Delta_1^1 e^{iR_0-\tau} - \rho^\chi \Delta_0^1 e^{2iR_0-2\tau}} d\tau,$$

Обозначим через ξ_1 и ξ_2 корни уравнения $\Delta_0^1 + \Delta_1^1\xi - \rho^\chi\Delta_0^1\xi^2 = 0$. Рассмотрим ветвь логарифма с мнимой частью области значений $(-\pi, \pi]$. Знаменатель дроби под интегралом разложим на сомножители. Обозначим $C_1 = \frac{(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{2\pi i \rho^\chi \Delta_0^1}$. Предположим, числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$ сходятся попарно. Тогда

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iR-\tau}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\rho^{\chi}\Delta_0^1(e^{iR-\tau} - \xi_1)(e^{iR-\tau} - \xi_2)}d\tau = C_1\frac{Log(\xi_2/\xi_1)}{\xi_1 - \xi_2}.$$

в случае различных ξ_1 и ξ_2. Если же эти числа совпадают, то

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iR-\tau}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\rho^{\chi}\Delta_0^1(e^{iR-\tau} - \xi_1)(e^{iR-\tau} - \xi_2)}d\tau = -C_1 \cdot \frac{1}{\xi_1}.$$

Предположим, числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$ асимптотически отделены. Рассмотрим числа $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$, которые разделяют $Im(Log(\xi_1))$ и $Im(Log(\xi_2))$. Тогда

$$\mathfrak{C} = \sum_{j=1,2}\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tilde{R}_j-\tau}(\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1})}{\rho^{\chi}\Delta_0^1(e^{i\tilde{R}_j-\tau} - \xi_1)(e^{i\tilde{R}_j-\tau} - \xi_2)}d\tau =$$

$$= \sum_{j=1,2}\frac{\hat{\Delta}_{1,k+1} - \hat{\Delta}_{k+1,1}}{4\pi i\rho^{\chi}\Delta_0^1}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\tilde{R}_j}dt}{(t - e^{-i\tilde{R}_j}\xi_1)(t - e^{-i\tilde{R}_j}\xi_2)} = C_1\frac{Log(-\xi_2/\xi_1)}{\xi_1 - \xi_2}.$$

Теорема 1.5 доказана.

4. Доказательство Теорем 1.1 и Теорем 1.2

Разложим функцию $\mathfrak{q}$ на две составляющие:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1,$$

где функция $\mathfrak{q}_0$ из класса $\mathbb{L}_1$ такова, что функции $\psi_a(x)$ и $\psi_b(x)$ имеют ограниченные вариации в точках a и b соответственно. Функция распределения заряда $\mathfrak{q}_1$ дифференцируема в точках a и b, и ее производные в этих точках равны нулю. В случае нечетных n и имеет носитель, отделенный от точек a и b в случае четных n. Функция $\mathfrak{q}_0$ дает нам первые два слагаемые в формуле (7) в силу теоремы из работы [6]. Если n нечетно, Теорема 1.4 дает нам желаемое. Если же n четно, опять разложим меру $\mathfrak{q}_1$ на две части:

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2 + \Delta_{\mathcal{Q}}(\frac{a+b}{2})\,\delta(x - \frac{a+b}{2}).$$

Применив Теорему 1.4 к мере $\mathfrak{q}_2$, а после этого этого Теорему 1.5 к оставшемуся слагаемому, мы завершаем доказательство нашего главного результата.

5. Пример $\mathfrak{C} \neq 0$

Рассмотрим оператор четвертого порядка, порожденный дифференциальным выражением $\ell = D^4$ и систему граничных условий:

$$\begin{cases} y(0) + y(1) = 0, \\ y'(1) = 0, \\ y''(0) = 0, \\ y'''(0) + y'''(1) = 0. \end{cases}$$

В этом случае оператор $\mathbb{L}$ является самосопряженным, и при этом

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{6\pi i\sqrt{5}} Log\left(\frac{1 - 4i\sqrt{5}}{9}\right).$$

Список литературы

[1] E. D. Galkovskii, A. I. Nazarov *A general trace formula for the differential operator on a segment with the last coefficient perturbed by a finite signed measure*, https://arxiv.org/abs/1612.02410.

[2] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, *Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка*, ДАН СССР, **88** (1953), N4, 593–596.

[3] Н. Н. Конечная, Т. А. Сафонова, Р. Н. Тагирова, *Асимптотика собственных значений и регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с δ-потенциалом*, Вестник САФУ, 2016, N1, 104–113.

[4] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., М., Наука, 1969.

[5] A. I. Nazarov, Ya. Yu. Nikitin, *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems*, Prob. Th. Rel. Fields. **129** (2004), N4, 469–494

[6] A. I. Nazarov, D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Tamarkin equiconvergence theorem and trace formula revisited*, J. Spectral Theory, **4** (2014), N2, 365–389.

[7] А. М. Савчук, *Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом*, УМН, **55** (2000), N6, 155–156.

[8] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Мат. заметки, **69** (2001), N3, 427–442.

[9] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, *Следы операторов*, УМН, **61** (2006), N5, 89–156.

[10] А. А. Шкаликов, *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*, Труды сем. им. И.Г. Петровского, **9** (1983), 140–179.

[11] Р. Ф. Шевченко, *О следе дифференциального оператора*, ДАН СССР, **164** (1965), 62–65.